ある解析関数の単葉半径について

吉　開　利　秋

(昭和44年9月30日受理)

On the radius of univalence ofi certain analytic functions

Toshiaki Yoshikai

Abstract

Suppose that $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ is analytic for $|z|<1$.

The condition

(1) $$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right\}>0 \quad \text{for } |z|<\mathrm{r}$$

is necessary and sufficient for $f(z)$ to be univalent and convex for $|z|<r$.

The condition

(2) $$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0 \quad \text{for } |z|<\mathrm{r}$$

is necessary and sufficient for $f(z)$ to be univalent and starlike for $|z|<r$. Since each convex function is starlike, a function which is convex in $|z|<1$ satisfces (2) with $r=1$.

In [1], the function $f(z)$ is said to be starlike of order α $(0\leqq\alpha<1)$ if it satisfies the condition

(3) $$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\alpha \quad \text{for } |z|<1.$$

In[2], it is shown that if $f(z)$ is convex for $|z|<1$, then it is starlike of order $\frac{1}{2}$ and

(4) $$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}>\frac{1}{2} \quad \text{for } |z|<1.$$

As Strohhäcker has pointed out neither (3) with $\alpha=\frac{1}{2}$ nor (4) are sufficient for the convexity of $f(z)$ in $|z|<1$.

Now in this note received suggestions from MacGregor's paper [3], we generalize the theorems demonstrating in J. S. Ratti's paper [4] for analytic functions with which power seies $f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots\cdots$, $g(z)=z+\mathrm{b}_{n+1}z^{n+1}+\ldots\ldots$

I　緒　　論

T. H. MacGregor の paper を参考にして，最近 J. S. Ratti が試みた定理（即ち

$g(z)$ が $\mathrm{Re}\left\{\dfrac{g(z)}{z}\right\}>0$ for $|z|<1$，又(4)を満足する場合，$f(z)$ の単葉且星型半径を決定する）の一般化を試みた。

II 定理と証明

定理を証明する前に，証明に必要な予備定理を示しておく。

〔予備定理 1〕〔3〕

$h(z)=1+C_n z^n+\cdots\cdots\cdots$ は analytic 且 Re $h(z)>0$ for $|z|<1$ ならば，

$$\left|\frac{h'(z)}{h(z)}\right| \leqq \frac{2n|z|^{n-1}}{1-|z|^{2n}}$$

〔予備定理 2〕〔5〕

$\phi(z)$ はanalytic 且 $|\phi(z)|\leqq 1$ for $|z|<1$ ならば，

$$|\phi'(z)| \leqq \frac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2}$$

〔定理 1〕

$f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots\cdots\cdots$，$g(z)=z+b_{n+1}z^{n+1}+\cdots\cdots\cdots$ は共に analytic 且

$\mathrm{Re}\left\{\dfrac{g(z)}{z}\right\}>0$ for $|z|<1$ であるとする。

もし，$\mathrm{Re}\left\{\dfrac{f(z)}{g(z)}\right\}>0$ for $|z|<1$ ならば，

$f(z)$ は $|z|<\left((4n^2+1)^{\frac{1}{2}}-2n\right)^{\frac{1}{n}}$ で単葉且星型である。

証明）

$\dfrac{g(z)}{z}=p(z)$ とおけば，Re $p(z)>0$ for $|z|<1$.

$\dfrac{f(z)}{g(z)}=h(z)$ とおけば，Re $h(z)>0$ for $|z|<1$.

又，

$f(z)=h(z)\cdot g(z)=zp(z)\cdot h(z)$ であるから，

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+\frac{zh'(z)}{h(z)}+\frac{zp'(z)}{p(z)}$$

〔予備定理 1〕より，

$$\left|\frac{zh'(z)}{h(z)}\right| \leqq \frac{2n|z|^n}{1-|z|^{2n}},\quad \left|\frac{z\cdot p'(z)}{p(z)}\right| \leqq \frac{2n|z|^n}{1-|z|^{2n}}$$

故に，

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}=1+\mathrm{Re}\frac{zh'(z)}{h(z)}+\mathrm{Re}\frac{zp'(z)}{p(z)} \geqq 1-\frac{4n|z|^n}{1-|z|^{2n}}$$

$$=\frac{1-4n|z|^n-|z|^{2n}}{1-|z|^{2n}}$$

即ち，

(1) $$|z|^{2n}+4n|z|^{n}-1<0 \text{ であれば，} \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \text{ となる。}$$

(1)より

(2) $$|z|<\left((4n^2+1)^{\frac{1}{2}}-2n\right)^{\frac{1}{n}}$$

故に，

$f(z)$は(2)で，単葉且星型である。

いま，

$$f(z)=\frac{z(1-z^n)^2}{(1+z^n)^2},\quad g(z)=\frac{z(1-z^n)}{1+z^n} \text{ とおけば，}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{g(z)}{z}\right\}>0 \text{ for } |z|<1, \text{ 又 } \mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}>0 \text{ for } |z|<1.$$

即ち，

$f(z)$ は定理の条件を満足して居る。

又，

$$f'\left(r_n e^{i\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right)=0,\quad r_n=\left((4n^2+1)^{\frac{1}{2}}-2n\right)^{\frac{1}{n}} \text{ であるから，}$$

$f(z)$ は $|z|<r$，$r>r_n$ で単葉でない。

即ち定理の結果をこれ以上改良することは出来ない。

〔定理２〕

$f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots\cdots$，$g(z)=z+b_{n+1}z^{n+1}+\cdots\cdots$，は共に analytic 且

$\mathrm{Re}\left\{\frac{g(z)}{z}\right\}>\frac{1}{2}$ for $|z|<1$ であるとする。

もし，$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)}{g(z)}\right\}>0$ for $|z|<1$ ならば，

$f(z)$ は $|z|<r_o$ で単葉且星型である。

但し，r_o は $(3n-1)r^n+(2n+1)r^{2n}-(n-1)r^{3n}-1=0$ を満足する（0，1）の間の根とする。

証明）

仮定より，

$h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}=1+C_n z^n+\cdots\cdots$，は analytic 且 $\mathrm{Re}\,h(z)>0$ for $|z|<1$.

故に〔補助定理１〕より，

(1) $$\left|\frac{zh'(z)}{h(z)}\right|\leqq\frac{2n|z|^n}{1-|z|^{2n}}$$

又，

$p(z)=\dfrac{g(z)}{z}=1+b_{n+1}z^n+\cdots\cdots\cdots=1+d_n z^n+\cdots\cdots\cdots$, とすれば，

$p(z)$ は analytic for $|z|<1$ 且 $\mathrm{Re}\ p(z)>\frac{1}{2}$ for $|z|<1$ で，

又 $p(o)=1$ となる。

$q(z)=2p(z)-1=1+2d_n z^n+\cdots\cdots\cdots$, とすれば，

$\mathrm{Re}\ q(z)>0$ for $|z|<1$.

$k(z)=\dfrac{1-q(z)}{1+q(z)}$ とおけば，

$k(z)$ はanalytic 且 $|k(z)|<1$ for $|z|<1$. そして又，$k(o)=0$.

故に，

$k(z)=z^n\phi(z)$ とすれば，$\phi(z)$ は analytic 且 $|\phi(z)|\leqq 1$ for $|z|<1$.

以上より，

(2) $$g(z)=\frac{z}{1+z^n\phi(z)}$$

(2)より，

(3) $$g'(z)=\frac{1-(n-1)z^n\phi(z)-z^{n+1}\phi'(z)}{(1+z^n\phi(z))^2}$$

(3)より，

(4) $$\frac{zg'(z)}{g(z)}=\frac{1-(n-1)z^n\phi(z)-z^{n+1}\phi'(z)}{1+z^n\phi(z)}$$

又，

(5) $$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{zh'(z)}{h(z)}+\frac{zg'(z)}{g(z)}$$

(1)より，

(6) $$\mathrm{Re}\frac{zh'(z)}{h(z)}\geqq\frac{-2n|z|^n}{1-|z|^{2n}}$$

(5)に，(4)，(6)を用ひて，

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\geqq\mathrm{Re}\left(\frac{1-(n-1)z^n\phi(z)-z^{n+1}\phi'(z)}{1+z^n\phi(z)}-\frac{2n|z|^n}{1-|z|^{2n}}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\frac{1-|z|^{2n}-2n|z|^n-(1-|z|^{2n})z^{n+1}\phi'(z)-(n-1)(1-|z|^{2n})z^n\phi(z)-2n|z|^n z^n\phi(z)}{(1-|z|^{2n})(1+z^n\phi(z))}\right\}$$

右辺が positive であれば，$\mathrm{Re}\left\{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0$.

即ち

(7) $$\mathrm{Re}\left\{\frac{2n|z|^n(1-z^n\phi(z))-(|z|^{2n}+4n|z|^n-1+(1-|z|^{2n})z^{n+1}\phi'(z)+(n-1)(1-|z|^{2n})z^n\phi(z)}{(1-z^{2n})(1+z^n\phi(z))}\right\}>0$$

(7)を変形してゆけば，

$\mathrm{Re}\ [\{2n|z|^n(1-z^n\phi(z))-(|z|^{2n}+4n|z|^n-1+(1-|z|^{2n})z^{n+1}\phi'(z)+(n-1)$

$$(1-|z|^{2n})z^n\phi(z))\}\cdot\{(1+\overline{z^n}\overline{\phi(z)})\}]>0$$

$$2n|z|^n(1-|z|^{2n}\phi(z)^2)-\mathrm{Re}[\{|z|^{2n}+4n|z|^n-1+(1-|z|^{2n})z^{n+1}\phi'(z)$$
$$+(n-1)(1-|z|^{2n})z^n\phi(z)\}\{(1+\overline{z^n}\overline{\phi(z)})\}]>0$$

(8) $$\mathrm{Re}[\{|z|^{2n}+4n|z|^n-1+(1-|z|^{2n})z^{n+1}\phi'(z)+(n-1)(1-|z|^{2n})z^n\phi(z)\}$$
$$\{(1+\overline{z^n}\overline{\phi(z)})\}]$$
$$<2n|z|^n(1-|z|^n|\phi(z)|)(1+|z|^n|\phi(z)|)$$

(8)の右辺に〔補助定理2〕を用ひて，

(9) $$\leqq(|z|^{2n}+4n|z|^n-1+(1-|z|^{2n})|z|^{n+1}\frac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2}$$
$$+(n-1)(1-|z|^{2n})|z|^n|\phi(z)|)\cdot(1+|z|^n|\phi(z)|)$$

(8)，(9)より，次の不等式が成立すれば，$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0$ となる。

$$(|z|^{2n}+4n|z|^n-1)(1-|z|^2)+(1-|z|^{2n})|z|^{n+1}(1-|\phi(z)|^2)$$
$$+(n-1)(1-|z|^{2n})(1-|z|^2)|z|^n|\phi(z)|<2n|z|^n(1-|z|^2)(1-|z|^n|\phi(z)|)$$

こゝで，

$|z|=r$ $(0<r<1)$，$|\phi(z)|=x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ とおけば，

(10) $$r^{2n}(1-r^2)+4nr^n(1-r^2)+r^2+r^{n+1}-r^{3n+1}-2nr^n(1-r^2)$$
$$+r^n(1-r^2)((n-1)(1-r^{2n})+2nr^n)x-(1-r^{2n})r^{n+1}x^2<1$$

(10)の左辺を $E(x)$ とすれば，$E'(x)=0$ にする点 x_0 は，

$$x_0=\frac{(n-1)(1-r^2)}{2r}+\frac{n(1-r^2)r^{n-1}}{1-r^{2n}}$$

$x_0>1$ なる故

(10)が成立するためには，$E(1)<1$

即ち，(10)より，

$$(1-r^2)(r^{2n}+4nr^n-1+(n-1)r^n(1-r^{2n})-2nr^n(1-r^n))<0$$

簡単にして，

(11) $$(3n-1)r^n+(2n+1)r^{2n}-(n-1)r^{3n}-1<0$$

(11)の左辺を $Q(r)$ とすれば，$Q(r)=0$ とする根は，

$Q(0)<0$，$Q(1)>0$，$Q'(r)>0$ なる故，(0，1) の間に1つ存在する。

いま，其の根を r_0 としよう。

そのとき，$|z|<r_0$ で，$E(1)<1$ となり，

$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0$ となる。

いま，

$f(z)=\frac{z(1-z^n)}{(1+z^n)^2}$，$g(z)=\frac{z}{1+z^n}$ とすれば，

$g(z)$, $f(z)$ は，定理の条件を満足し，

又 $f'(r_0)=0$ となることが分る。

即ち，

$f(z)$ は $|z|<r$, $r>r_0$ なる円内で単葉ではない。

故に定理の結果は sharp である。

文 献

1. M. S. Robertson, On the theory of univalent functions, Ann. of Math. vol, 37, No. 2 (1936), pp. 374-408.
2. Strohhäcker, E, Beiträge zur theorie der schlichten funktionen, Math. Z. vol, 37, (1933), pp. 356-380.
3. T. H. MacGregor, the radius of univalence of certain analytic functions, Proc. Am. Math. Soc. vol 14, (1963), pp. 514-520.
4. J. S. Ratti, the radius of univalence of certain analytic functions, Math. Z. vol, 107, (1968), pp. 241-248.
5. Z. Nehari, Conformal mapping, McGraw-Hill, New York, 1952; p. 168.